

Dévoir surveillé 2

8 avril 2014

Question du cours.

Soit $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} . Soit $p'(x)$ sa dérivée et $p''(x)$ la deuxième dérivée.

Donner une condition pour que $a \in \mathbb{R}$ soit une racine double de $p(x)$.

Exercice 1.

(a) Donner le développement limité en 0 de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à ordre 5.

(b) En utilisant que $x^3 \cotan(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{\sin(x)}$, donner le développement limité de $x^3 \cotan(x)$ en 0 à l'ordre 6.

Considérer la courbe

$$\gamma(t) = \left(t \ln \left(\frac{1}{1-t} \right), t^3 \cotan(t) \right).$$

(c) Étudier le domaine de définition de γ .

(d) Quel est le comportement de la courbe près de $t = 1$?

(e) Montrer que $t = 0$ est un point singulier. Quel est son type ?

Exercice 2. Soit

$$f(x) = x \cosh(x) - \sinh(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4.

(b) Montrer que $f^{(5)}(x) = x \sinh(x) + 4 \cosh(x)$.

(c) Énoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4.

(d) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$\frac{x^3}{3} \leq x \cosh(x) - \sinh(x) \leq \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

(Indication : utiliser que $5e + \frac{3}{e} < 16$.)